Concours e3a
Session 2001

Epreuve de Physique MP
Durée 4 heures

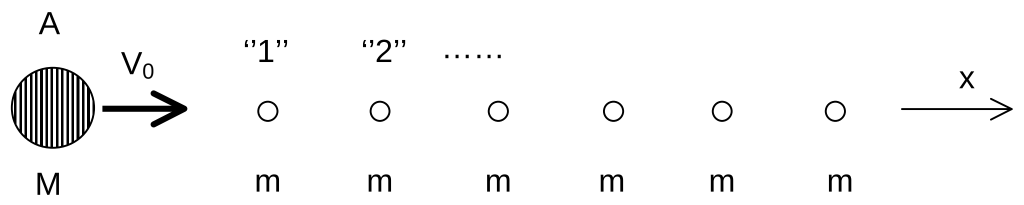
Cette épreuve est constituée d'un exercice de mécanique et d'un problème de thermodynamique totalement indépendants l'un de l'autre . L'usage de la calculatrice est autorisé.

EXERCICE

Un modèle de frottement fluide

Dans cet exercice, on s'intéressera au mouvement d'une particule lourde A de masse M dans un milieu résistif idéalisé. On décrira le milieu par un ensemble de molécules légères de masse m<M, alignées de manière ordonnée suivant l'axe x, comme représenté sur la figure 1.

Figure 1



A l'instant initial, les molécules du milieu sont au repos tandis que A se déplace avec une vitesse V_0, parallèle à l'axe x. On notera ''1'' la molécule la plus proche de A à l'instant initial, ''2'' la suivante, etc (cf. figure 1).
Dans tout l'exercice, on supposera que les collisions entre particules sont élastiques et que les vecteurs vitesses des molécules après les chocs dirigés suivant l'axe x.

1) Montrer que les vitesses V_1 et v_1 de la particule A et de la molécule ''1''après leur collision sont données par :

$$V_1 = \frac{M-m}{M+m} V_0 \qquad \text{et} \qquad v_1 = \frac{2M}{M+m} V_0$$

2) Après sa collision avec A, ''1 '' se déplace vers la droite et entre en collision avec ''2''. Déterminer les vitesses de ''1'' et ''2'' après leur collision.

3) Démontrer que A pourra entrer en collision avec ''1'' une infinité de fois et montrer que la vitesse V_n de A après n collisions avec ''1'' s 'écrit sous la forme $V_n = C_1 \left(f(r)\right)^n$ avec $r = \frac{m}{M}$. Déterminer la fonction f(r) et la constante C_1.

4) On suppose dans la suite que le milieu est caractérisé par une densité linéaire ρ de molécules. Exprimer la distance x parcourue par A dans le milieu après un grand nombre n de collisions en fonction de ρ et n. Montrer que la vitesse V(x) de A à la position x peut être écrite sous la forme $V(x) = C_2\, e^{-\frac{x}{\lambda}}$. Déterminer C_2 et exprimer λ en fonction de ρ et r. Quelle est l'interprétation physique de λ ?

5) Utiliser la loi fondamentale de la dynamique pour montrer que la force F(x) subie par A au point x s'écrit $F(x) = M g(r,\rho) \left(V(x)\right)^{\gamma}$. Déterminer la fonction $g(r,\rho)$ et l'exposant γ.
Commenter le résultat obtenu.

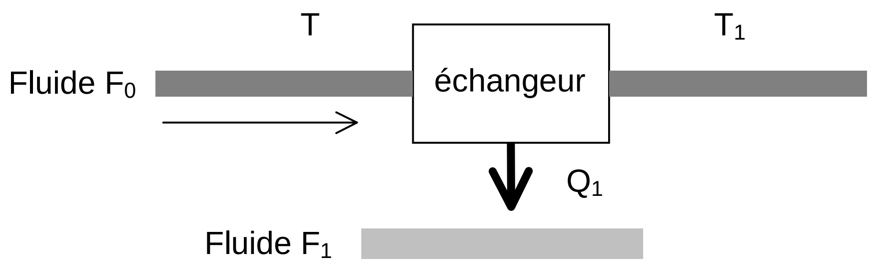
PROBLEME

Optimisation des performances thermodynamiques des centrales thermiques ou nucléaires

I) Principe de fonctionnement. Rendement.

1) Un fluide F_0 sort du réacteur de la centrale à la pression P et à la température T. Il est envoyé dans ces conditions dans un échangeur thermique où il cède de la chaleur à un second fluide F_1, qui sert à actionner les turbines de la centrale. Le fluide F_0 sort de l'échangeur à la température T_1 et est renvoyé dans le réacteur, sa pression restant égale à P durant tout le cycle (cf. figure 1). Le fluide F_0 est décrit par son énergie interne U(T) et son enthalpie H(T) ; de plus sa capacité thermique massique à pression constante c_p est constante.

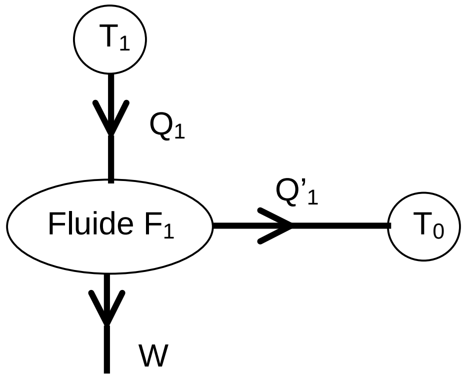
Figure 1



Soit 1 kg de fluide F_0 formant un système fermé évoluant dans l'échangeur thermique de la température T à la température T_1 à pression constante P. En appliquant soigneusement le premier principe de la thermodynamique, exprimer la chaleur Q_1 cédée par ce système en fonction des données.

2) Lors du transfert de l'unité de masse de fluide F_0 dans l'échangeur thermique, celui-ci cède au fluide F_1 en totalité la chaleur Q_1 évaluée en **1)**. D'autre part, le fluide F_1 constitue un système fermé qui décrit une évolution cyclique réversible dans une machine thermique en fournissant à l'extérieur un travail W>0, en recevant la chaleur Q_1 de F_0 et en cédant une chaleur $Q'_1>0$ à l'atmosphère dont la température est T_0. La machine est assimilée à une machine ditherme réversible fonctionnant entre une source chaude de température T_1 et une source froide de température T_0 (cf. figure 2).

Figure 2



2.a) En appliquant les principes de la thermodynamique, établir deux relations entre W, Q_1, Q'_1, T_0 et T_1. Rappeler la définition de l'efficacité thermodynamique ε de cette machine ditherme et l'exprimer en fonction de T_0 et T_1 (théorème de Carnot).

2.b) Montrer que le travail fourni W s'écrit : $W = c_p \dfrac{(T-T_1)(T_1-T_0)}{T_1}$

2.c) Interpréter concrètement la valeur particulière de W lorsque $T_1=T_0$. Même question lorsque $T_1=T$.

2.d) Montrer que, T et T_0 étant fixées, W passe par un maximum W_m pour une valeur particulière T_m de T_1. Exprimer T_m et W_m en fonction de c_p, T et T_0. Tracer l'allure du graphe de W en fonction de T_1 pour $T_0<T_1<T$.

2.e) En pratique, comment peut on faire pour régler la température T_1 ?

2.f) On définit le rendement du dispositif comme le rapport $\eta=\dfrac{W_m}{Q}$ du travail maximum récupérable sur la chaleur Q qu'on pourrait retirer de l'unité de masse du fluide F_0 par refroidissement isobare de T à T_0. Exprimer η en fonction du rapport $\dfrac{T_0}{T}$, puis en fonction de l'efficacité de Carnot ε d'une machine ditherme qui fonctionnerait entre deux sources à T et T_0. Tracer l'allure du graphe de η fonction de ε pour $0<\varepsilon<1$. Commenter.

2.g) Pour une centrale nucléaire, T = 600 K, T_0 = 300 K et c_p = 960 $J.kg^{-1}.K^{-1}$(il s'agit de sodium). Sachant que le débit massique du fluide F_0 est de 900 $kg.s^{-1}$, calculer en Mégawatts la puissance supposée optimale de l'installation. Calculer le rendement η de la machine ainsi que son efficacité ε.

II) Rôle du nombre d'échangeurs

On suppose désormais que le fluide F_0 pris initialement à la pression P et à la température T traverse sans variation de pression 2 échangeurs placés en série, sa température après le $i^{ème}$ échangeur étant T_i. Deux fluides F_1 et F_2 effectuent des cycles dithermes réversibles entre les températures T_1 et T_0 pour F_1, T_2 et T_0 pour F_2 en recevant toute la chaleur perdue par F_0 dans l'échangeur correspondant (cf. figure 3). A la sortie du deuxième échangeur, F_0 est renvoyé dans le réacteur pour être réchauffé.

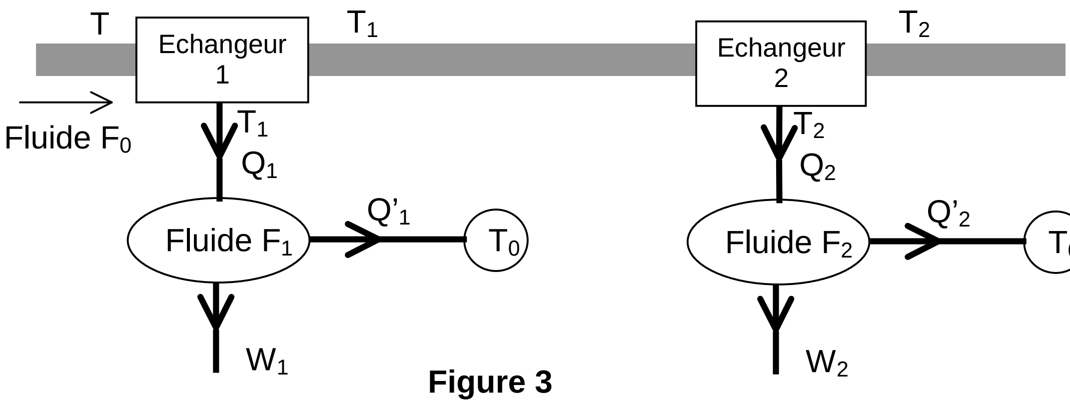


Figure 3

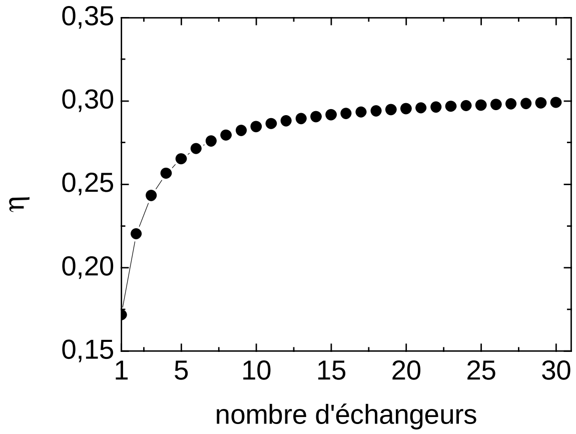
1) On a établi à la question **I.2.b)** que le travail cédé par la machine 1 à l'extérieur vaut : $W_1 = c_p \frac{(T-T_1)(T_1-T_0)}{T_1}$. En adaptant cette formule, donner sans nouvelle démonstration l'expression du travail W_2 cédé par la machine 2 à l'extérieur en fonction des données. En déduire le travail total W en fonction de c_p, T, T_0, T_1,T_2.

2) Montrer que T et T_0 étant fixées, W passe par un extremum W_m pour des valeurs particulières T_{1m} de T_1 et T_{2m} de T_2. On admettra qu'il s'agit d'un maximum. Exprimer T_{1m}, T_{2m} et W_m en fonction de c_p, T et T_0.
Evaluer le rendement η du système défini comme au **I.2.f)**.

3) En reprenant les données de la question **I.2.g)**, calculer T_{1m}, $T_{2m,}$ W_m, et η. Commenter les résultats en liaison avec ceux de **I.2.g)**.

4) Plus généralement, on peut considérer un système où le fluide F_0 traverse sans variation de pression n échangeurs thermiques placés en série. La figure 3 donne la variation en fonction de n, du rendement η d'un tel système (calculé après optimisation des températures des échangeurs). Commenter cette courbe.

Figure 3



En pratique, comment choisit on le nombre d'échangeurs dans une installation industrielle?

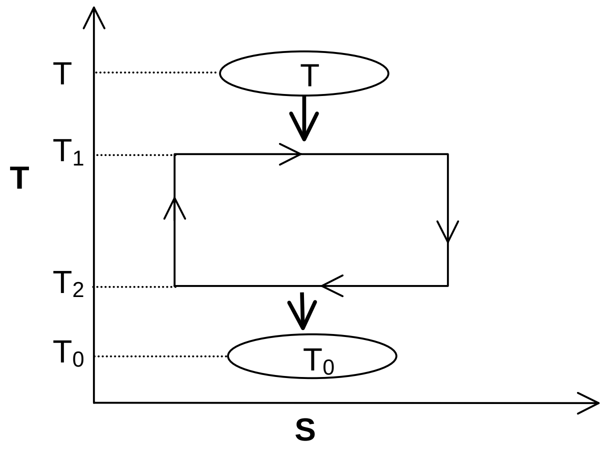
III) Optimisation de la puissance fournie

L'obtention du rendement maximum n'est pas nécessairement une priorité quand on construit une centrale. Le coût de construction, la simplicité, la puissance délivrée par exemple sont autant d'éléments contradictoires dont on doit tenir compte. Dans cette partie, on s'intéresse aux performances obtenues en termes de puissance fournie.

1) On considère une centrale où un fluide effectue un cycle ditherme réversible entre une source chaude à la température T et une source froide à la température T_0.
En considérant les transferts de chaleurs entre le fluide et les sources, montrer que la condition de réversibilité est incompatible avec l'obtention d'une puissance non nulle.

2) Pour remédier au problème soulevé à la question précédente, on réalise un cycle où seuls les transferts thermiques entre les sources et le fluide sont irréversibles. Plus précisément, on utilise toujours une source chaude à la température T et une source froide à la température T_0, mais on suppose que lorsque le fluide échange de la chaleur avec la source chaude (resp. froide), il se trouve à une température constante T_1 (resp. T_2) avec $T>T_1>T_2>T_0$. On suppose que les autres transformations subies par le fluide sont réversibles. Le diagramme (T,S) d'un tel cycle est représenté sur la figure 4.

Figure 4



On suppose de plus que la quantité de chaleur reçue par unité de temps par le fluide lorsqu'il se trouve en contact avec la source chaude est $\sigma(T-T_1)$. De même on suppose que la quantité de chaleur cédée par unité de temps par le fluide lorsqu'il se trouve en contact avec la source froide est $\sigma(T_2-T_0)$.

2.a) Pour interpréter ces expressions, on envisage le transfert de chaleur entre deux thermostats aux températures respectives T et T' occupant les demi-espaces z<0 et z>L, séparés par un cylindre solide, d'axe Oz, de section droite de surface S, de masse volumique μ, de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ. Rappeler sans démonstration l'équation dont est solution la température T(z,t) dans le cas général ; on fera apparaître la diffusivité thermique $D_{th}=\frac{\lambda}{\mu c}$.
Déterminer la solution T(z) en régime stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires). Etablir alors l'expression de la puissance thermique échangée entre les deux thermostats.

2.b) Le fluide est mis au contact de la source chaude (resp. froide) pendant une durée τ_1 (resp. τ_2) et on suppose que la durée de ces échanges thermiques est très supérieure à la durée des autres transformations du cycle. Quelle est alors la durée τ d'un cycle du moteur ?
En pratique, les températures de contact T_1 et T_2 fluctuent autour de leurs valeurs moyennes du fait des évolutions subies par le fluide au cours d'un cycle. A quelle condition sur τ, D_{th} et L, l'approximation des régimes quasi-stationnaires est-elle validée ?

2.c) Quelles sont les expressions des chaleurs échangées par le fluide avec les sources chaude (température T_1) et froide (température T_2) ? En supposant ces échanges réversibles, établir l'expression du rapport $\frac{\tau_2}{\tau_1}$ en fonction de T, T_1,T_2 et T_0.

2.d) Montrer que la puissance P cédée par la centrale à l'extérieur est donnée par :

$$\frac{1}{P}=\frac{1}{\sigma(T_1-T_2)}\left(\frac{T}{T-T_1}+\frac{T_0}{T_2-T_0}\right)$$

2.e) Montrer qu'il existe trois cas particuliers simples de relations entre T_1, T_2, T et T_0 telles que la puissance soit nulle et interpréter en liaison avec l'énoncé de Kelvin du deuxième principe qu'on rappellera.

2.f) Un calcul fastidieux, que l'on ne demande pas de faire, montre que T et T_0 étant fixées, la puissance P est maximale si :

$$\frac{T_1}{\sqrt{T}}=\frac{T_2}{\sqrt{T_0}}=\frac{\sqrt{T}+\sqrt{T_0}}{2}$$

Exprimer la puissance maximum fournie en fonction de σ, T et T_0.

2.g) Exprimer l'efficacité thermodynamique ε_p de la machine ditherme dans ces conditions en fonction du rapport $\frac{T_0}{T}$, puis en fonction de l'efficacité ε_c de Carnot d'un cycle ditherme réversible entre T et T_0. Tracer l'allure du graphe de ε_p en fonction de ε_c et commenter.

2.h) Le tableau ci-dessous donne quelques données relatives à différentes centrales thermiques où nucléaires :

Centrale	**T(K)**	**T_0(K)**	**ε mesurée**
West Thurrock (G.B), centrale au charbon	838	298	0.36
Candu (Canada), centrale nucléaire	573	298	0.3
Larderello (Italie), centrale géothermique	523	353	0.16

Dans chaque cas, calculer le rendement de Carnot et l'efficacité ε_p.
Conclure.