

ÉPREUVE DE SCIENCES INDUSTRIELLES

Filière : MP

SUJET MIS A LA DISPOSITION DES CONCOURS : CYCLE INTERNATIONAL, ENSTIM, INT, TPE-EIVP

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Les calculs numériques seront faits « à la main » avec une précision de $\pm 10\%$ ($0.9 \approx 1$).

Cet énoncé comporte 12 pages numérotées de 1 à 12. Le travail doit être reporté sur un document-réponse de 3 copies (12 pages) distribuées avec le sujet. Pour valider ce document-réponse, chaque candidat doit obligatoirement y inscrire à l'encre, à l'intérieur du rectangle d'anonymat situé en haut de chaque copie, ses nom, prénoms (souligner le prénom usuel), numéro d'inscription et signature - avant même d'avoir commencé l'épreuve. Il est conseillé de lire la totalité de l'énoncé avant de commencer l'épreuve.

Bien qu'organisées au sein d'une progression logique, les questions sont largement indépendantes. Il est donc possible de ne pas les traiter dans l'ordre. Par contre chaque question doit être rédigée dans l'ordre des sous-questions et sur les pages correspondantes du document-réponse. Le barème indiqué pourra être modifié.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

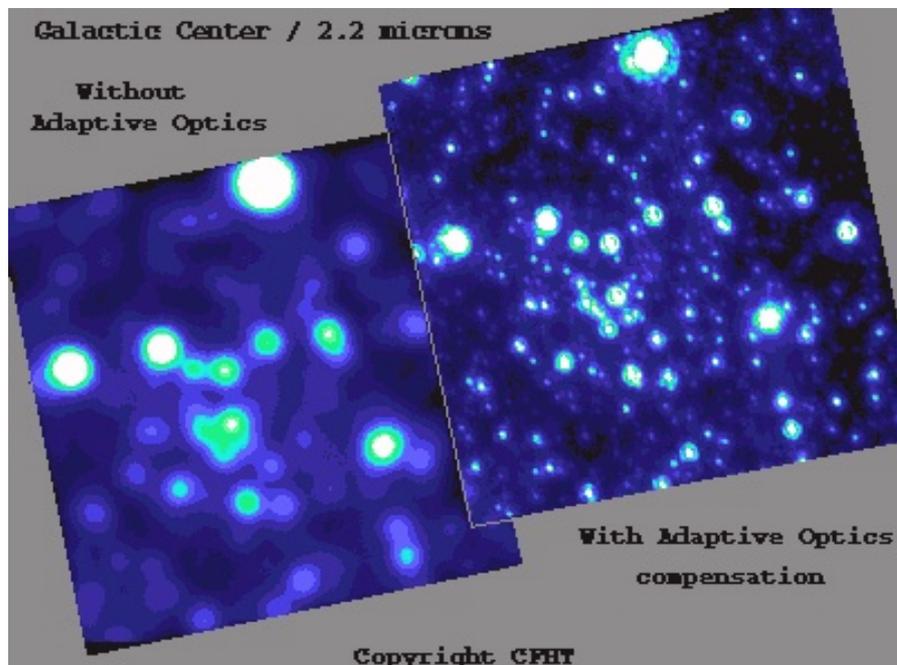
CORRECTION DE TILT D'UNE OPTIQUE ADAPTATIVE

Système conçu pour le VLT par le DESPA, Observatoire de Paris-Meudon.

1. PRESENTATION DU SYSTEME

En instrumentation astronomique, un système d'optique adaptative (OA) permet de corriger les effets des turbulences de l'atmosphère. Celles-ci provoquent des fluctuations aléatoires de l'indice de réfraction des couches de l'atmosphère traversées par la lumière, et sont à l'origine des déformations des surfaces d'onde reçues par le télescope. Il en résulte non seulement une déformation instantanée des images, mais également un « flou » dû aux variations de la surface d'onde pendant le temps de pose. La Figure 1 ci-dessous compare deux images du centre galactique prises dans l'infrarouge, l'une sans correction (à gauche), l'autre avec correction par la première optique adaptative astronomique : le système « Pueo » du télescope Canada-France-Hawaï.

Figure 1 :
Correction
de
turbulence
par Optique
Adaptative



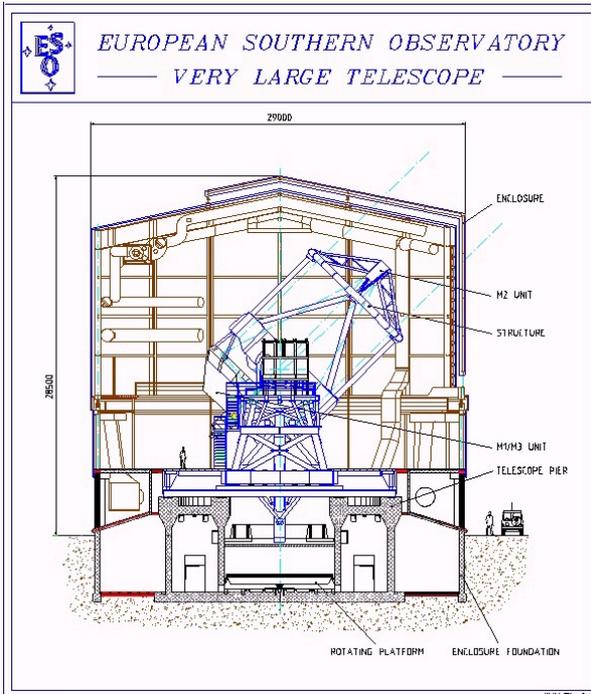


Figure 2 : Structure générale du VLT

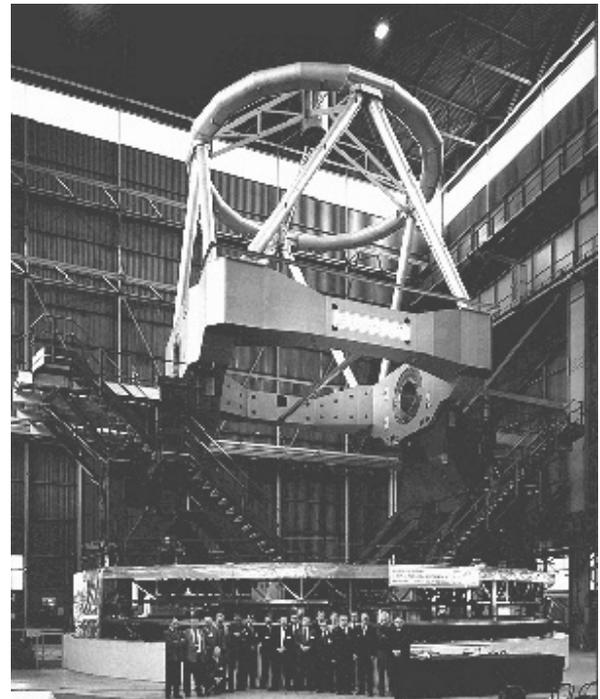
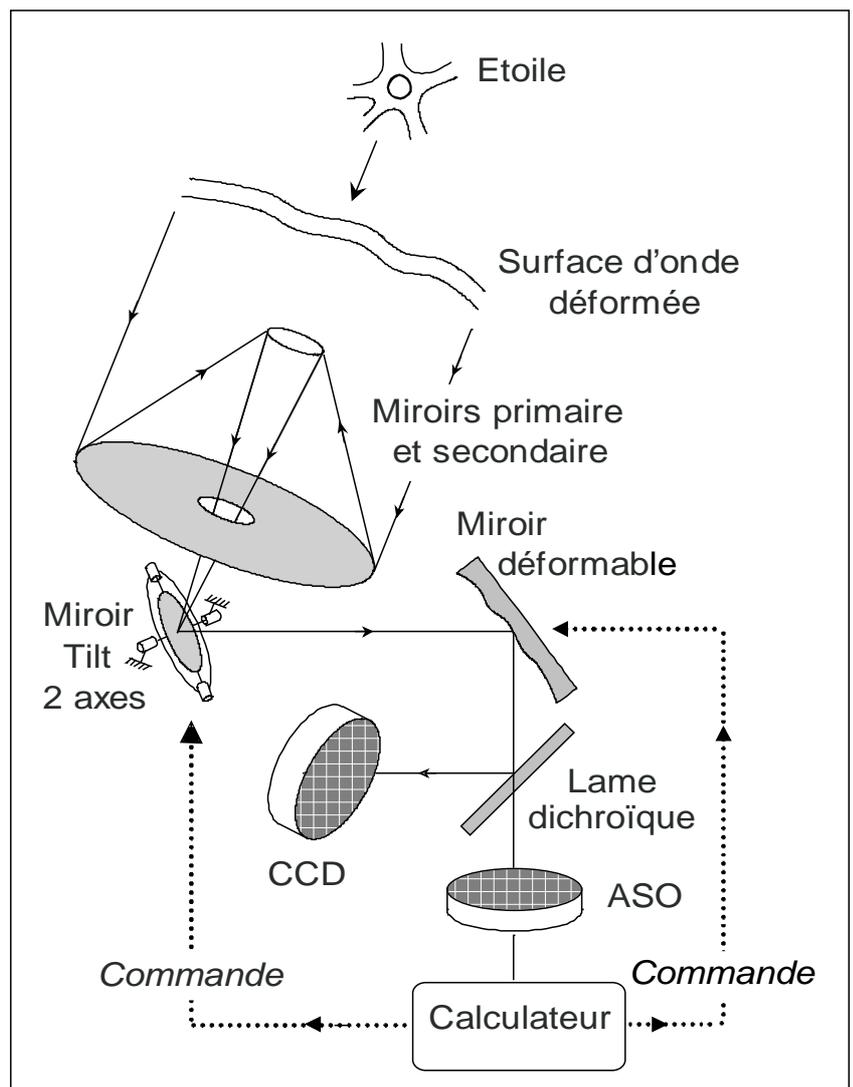


Figure 3 : Le VLT en cours de montage

Nous étudierons ici un sous-système de l'optique adaptative du Very Large Telescope européen (VLT) : cf. Figure 2 et Figure 3 ci-dessus. Le schéma de principe d'une optique adaptative est présenté Figure 4 ci-contre : la surface d'onde provenant de l'objet astronomique et déformée par l'atmosphère est reçue par les miroirs primaire puis secondaire du télescope. La lumière est séparée par une lame dichroïque (un miroir partiellement réfléchissant), et envoyée pour partie sur la caméra CCD où se forment les images, pour l'autre partie sur un analyseur de surface d'onde (ASO). Celui-ci fournit une estimation de la déformation de la surface d'onde. Un calculateur temps-réel en déduit les commandes à appliquer aux actionneurs de l'optique adaptative.

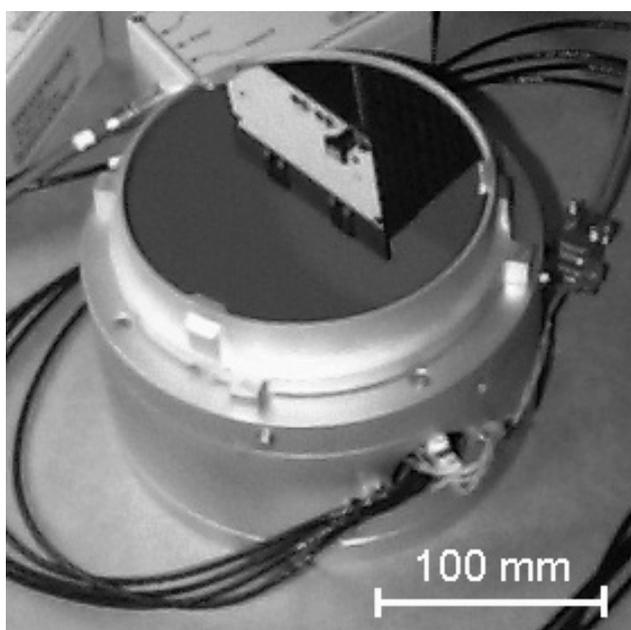
Figure 4 : Schéma de principe d'une optique adaptative



Pour des raisons de traitement du signal et de technologie des miroirs adaptatifs, on décompose la surface d'onde déformée en *modes*, c'est à dire qu'on la projette sur une base orthonormée de fonctions. Les premiers modes sont un « piston » (une constante, soit un mode d'ordre zéro), et deux basculements orthogonaux (modes d'ordre un) : *tip-tilt* en anglais et *tilts* en jargon technique de l'astronomie.

Le mode piston est indifférent et n'est pas corrigé. Les *tilts* représentent 90% de l'énergie de déformation. Les modes d'ordre compris entre 2 et une valeur maximale choisie par les concepteurs peuvent être corrigés par un miroir déformable, dont la technologie est généralement à base de matériaux piézo-électriques. Ce miroir ne peut presque pas corriger les *tilts*. Il est donc bien préférable de confier cette fonction à un sous-système séparé commandant un miroir plan par deux rotations orthogonales.

L'objet de cette étude est le système d'optique adaptative, et plus particulièrement le sous-système de correction de tilt (Tip-Tilt Mirror, ou TTM) conçu pour le VLT par le Département de Recherche Spatiale (DESPA) de l'Observatoire de Paris-Meudon.



*Figure 5 :
Prototype du
« Tip-Tilt Mirror »
du VLT*

Les différents aspects de l'étude de ce miroir sont les suivants :

- Optique : l'aspect le plus simple, car il « suffit » de réaliser un miroir plan rigide de haute précision.
- Mécanique : simple du point de vue cinématique, délicat du point de vue dynamique du fait du comportement vibratoire qui influe directement sur les performances.
- Automatique : étude classique dans son principe mais dont la mise en pratique présente des difficultés, dans le contexte de comportement dynamique déjà évoqué, de par les exigences des spécifications.
- Électronique : toute la chaîne d'acquisition de données et d'élaboration de la commande sont électroniques.
- Technologique et économique : les critères de choix de solutions techniques sont les mêmes que dans toute réalisation d'instrumentation scientifique de pointe en très petite série : la technologie choisie doit être simple, fiable, bien maîtrisée ; son coût (étude et réalisation) doit être raisonnable car les marchés des grands projets internationaux sont fortement concurrentiels .

Dans ce sujet, nous aborderons plusieurs de ces aspects, en insistant sur ce qui est le plus proche du programme des classes préparatoires. L'étude électronique ne sera pas abordée.

2. QUESTIONS

Dans ce sujet, les questions sont regroupées et chacune sera notée globalement. Les candidats sont invités à rédiger soigneusement leurs réponses, tout en les résumant ; les résultats intermédiaires dans une question Q_i seront numérotés ($Q_i.1$), ($Q_i.2$) etc., ce qui permet d'y faire référence par la suite. Les résultats importants seront encadrés. Bien rédiger consiste en particulier à expliquer avec concision ce que l'on fait et pourquoi, et non à détailler inutilement des calculs intermédiaires.

2.1. ETUDE FONCTIONNELLE DU SYSTEME D'OPTIQUE ADAPTATIVE

On propose d'abord aux candidats d'exprimer leur compréhension du fonctionnement du système. On a choisi pour ce faire le formalisme SADT (System Analysis and Design Technique, c'est à dire Technique d'analyse et de conception des systèmes) dont le principe est rappelé ci-contre Figure 6 :

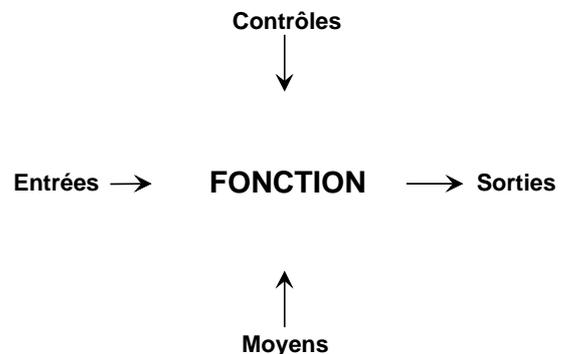


Figure 6 : Principe du SADT

Question 1 : SADT (2 points).

Réaliser un diagramme SADT de l'ensemble du système d'optique adaptative décrit Figure 4, page 2/12. Indiquer le niveau « A-0 » (A moins zéro) présentant la fonction globale, puis le niveau « A0 » détaillant ses sous-fonctions. On évitera les confusions entre entrées, moyens et contrôles.

2.2. ETUDE MECANIQUE DE LA PARTIE OPERATIVE

Les liaisons réelles définies dans le dossier technique (§ 3, page 8/12 et suivantes) ont été modélisées par des liaisons normalisées. Il en résulte le schéma de la Figure 7 ci-dessous :

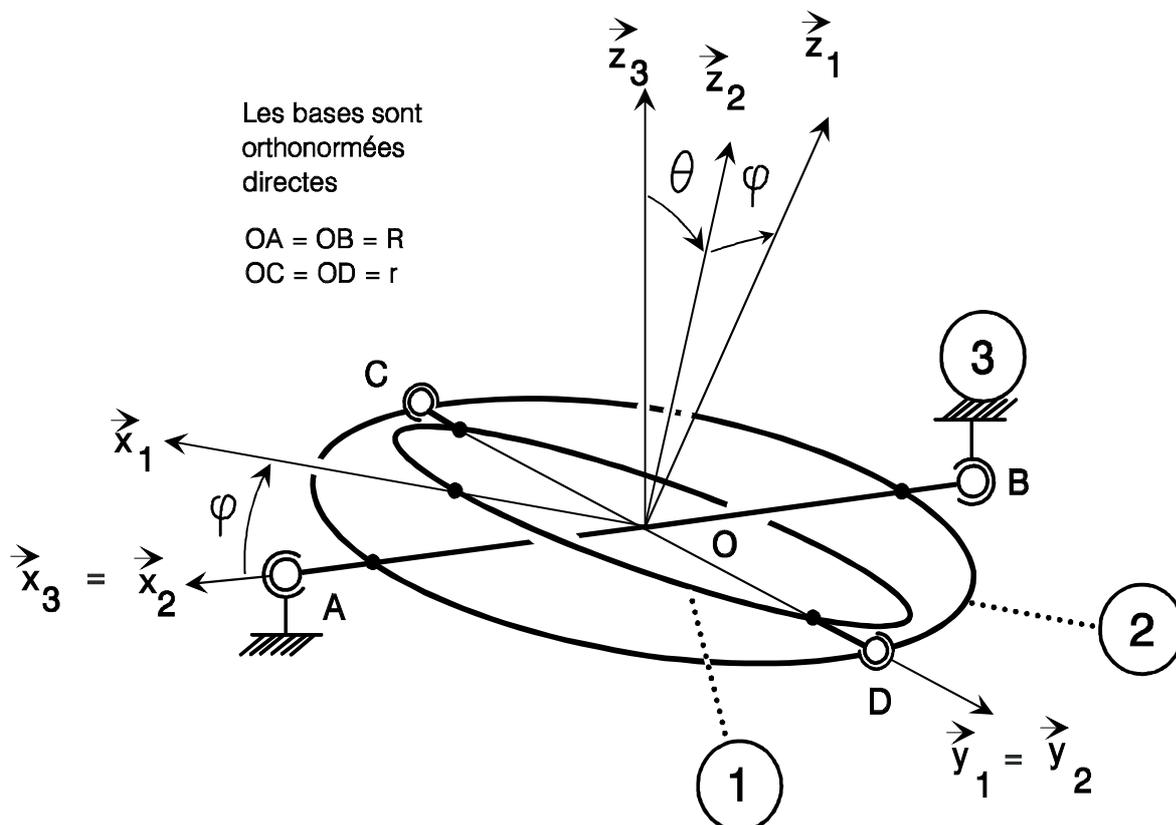


Figure 7 :
Schéma
des liaisons
du TTM

Lors de l'étude de la partie opérative, la première préoccupation est de contrôler la capacité mécanique de la monture du miroir à corriger les tilts. On s'intéresse donc aux liaisons entre la monture et le bâti, et en particulier à la liaison globale équivalente entre ces deux solides.

Question 2 : Étude cinématique et statique de la monture du miroir (3 points)

On peut dire d'une liaison mécanique qu'elle est linéaire si elle est caractérisée par des relations linéaires entre les éléments de réduction des torseurs qui la définissent. Avec cette définition, il est manifeste que les liaisons normalisées sont linéaires. Dans ce cas, l'ensemble des torseurs cinématiques permis par la liaison est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des torseurs cinématiques. La dimension de ce sous-espace, dit caractéristique de la liaison considérée, est appelé en mécanique « nombre de degrés de liberté » de la liaison.

On considère deux liaisons linéaires L_1 et L_2 . Les associations élémentaires dans un mécanisme sont « série » et « parallèle » : cf. la Figure 8 ci-dessous qui représente les graphes des liaisons correspondants.

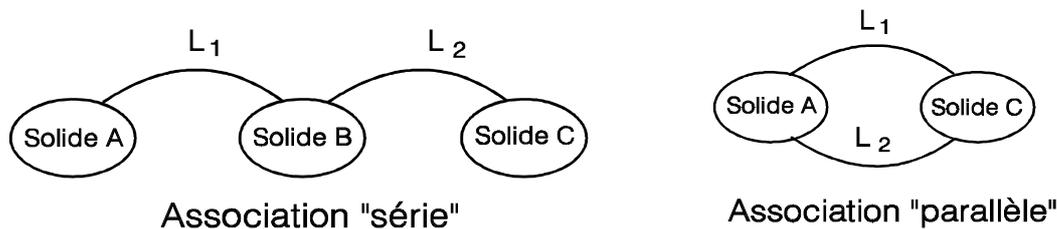


Figure 8 : Associations élémentaires de liaisons

- Montrer dans le cas général des associations de la Figure 8, que le sous-espace cinématique caractéristique de la liaison globale équivalente (Solide A / Solide C) est, pour une association en série, le sous-espace somme des sous-espaces caractéristiques de L_1 et L_2 ; en parallèle, le sous-espace intersection.
- Appliquer ces résultats aux liaisons globales équivalentes 1/2 et 2/3.
- Appliquer ensuite ces résultats à la liaison globale équivalente 1/3 : Tracer le graphe des liaisons impliquées. Nommer cette liaison 1/3, donner son degré de mobilité et ses éléments géométriques caractéristiques.
- Déterminer le degré d'hyperstaticité du mécanisme (1,2,3) constituant la liaison 1/3, et discuter le résultat : quels sont, dans le cas précis de ce mécanisme, les avantages et inconvénients de l'hyperstaticité rencontrée ?

Question 3 : Vérification de la linéarité des capteurs : étude en petits déplacements (3 points)

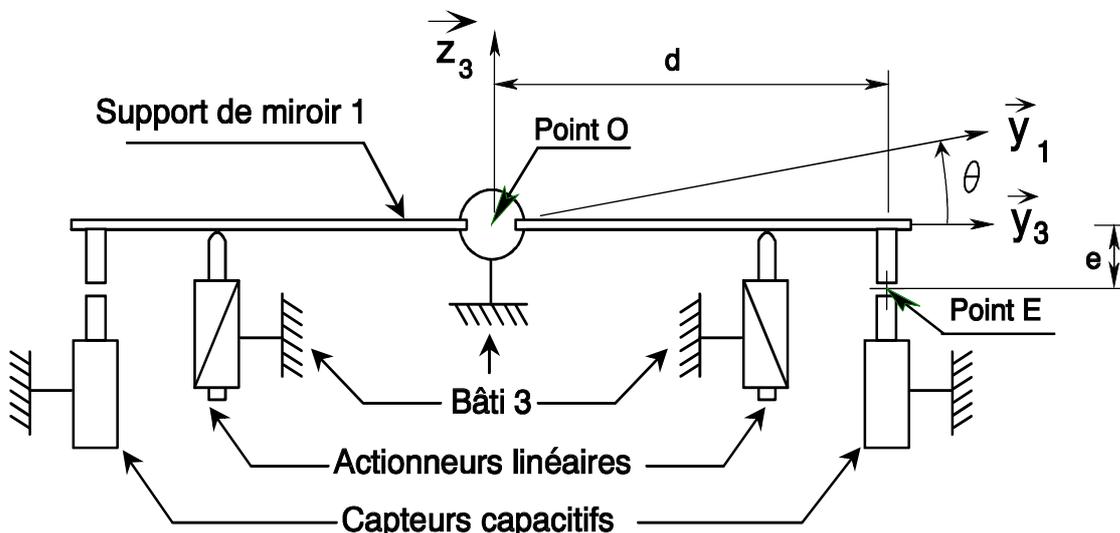


Figure 9 : Implantation des capteurs et des actionneurs

La seconde préoccupation est de contrôler la validité du modèle linéaire des capteurs, en particulier de la linéarité de la tension de sortie par rapport à l'entrée angulaire θ .

Du fait de la rotation, cette réponse n'est pas linéaire, mais on la linéarise pour θ au voisinage de zéro. On va donc montrer que le champ des déplacements d'une rotation d'angle θ au voisinage de 0 est tangent au champ des moments d'un torseur dit « de petit déplacement » (la définition de cette « tangence » est fournie ci-dessous). Pour cela, on appelle ρ la rotation affine d'axe $O\vec{x}_3$ et d'angle θ . Pour tout point M , on note

$M_1 = \rho(M)$. On définit $\vec{\delta}$, le champ des déplacements de ρ par $\vec{\delta}(M) = \overrightarrow{MM_1}$, et \vec{t} le
$$\left. \begin{array}{l} \vec{r} = \theta \vec{x}_3 \\ \vec{t}_{(0)} = \vec{0} \end{array} \right\}_O$$
 champ des moments du torseur dont les éléments de réduction en O sont définis ci-contre :

- Montrer que $\vec{\delta}$ admet \vec{t} comme champ tangent pour θ tendant vers 0, c'est à dire qu'il existe un champ noté $\vec{\varepsilon}_\theta$, tel que pour tout M , $\vec{\delta}(M) = \vec{t}(M) + \vec{\varepsilon}_\theta(M)$, la norme de $\vec{\varepsilon}_\theta(M)$ étant négligeable devant θ .
 \vec{t} est le champ des moments du « torseur de petit déplacement » associé à ρ .
- Avec ces notations et celles de la Figure 9 page 5/12, appliquer ce résultat au point E : expliciter le reste $\vec{\varepsilon}_\theta(E)$ sur la base \mathbf{B}_3 et donner une majoration de sa composante significative suivant \vec{z}_3 . En déduire la validité de l'approximation « la réponse des capteurs est linéaire par rapport à θ ».

Question 4 : Étude dynamique de la monture du miroir (5 points)

A partir de la cinématique de la monture, on peut alors étudier sa dynamique afin de construire un modèle de la fonction de transfert mécanique du système. Ce modèle servira aux calculs et simulations préliminaires, qui devront être confrontés aux tests du prototype.

Le système comporte deux axes asservis, nommés X et Y , dont les sorties sont les variables angulaires θ et φ . La première démarche du concepteur d'un système asservi multivariables est d'essayer de « découpler les axes », c'est à dire de rendre le système représentable par plusieurs boucles d'asservissement monovariante indépendantes. Dans cette partie, nous nous attacherons à montrer l'indépendance des deux fonctions de transfert mécaniques.

On utilisera une notation entre crochets pour les matrices : celle d'un vecteur \vec{u} dans une base \mathbf{B} sera notée $[\vec{u}]_{\mathbf{B}}$ au lieu de $mat_{\mathbf{B}}\vec{u}$, et celle d'une application linéaire (ou « opérateur ») $f : [\mathbf{f}]_{\mathbf{B}}$ au lieu de $mat_{\mathbf{B}}f$.

Si \vec{u} est une fonction vectorielle du temps, sa dérivée dans \mathbf{B} sera notée $\frac{d_{\mathbf{B}}\vec{u}}{dt}$.

Si g est une fonction scalaire du temps, sa dérivée sera notée \dot{g} .

Soit k la raideur torsionnelle des articulations élastiques « Free Flex » (moments de rappel : $-k.\theta$ et $-k.\varphi$).

On appelle M_x et M_y les moments de 3 sur 1 dus aux actionneurs, respectivement par rapport aux axes Ox_2 et Oy_2 , que l'on supposera indépendants des angles θ et φ .

On notera « 1 » le solide matériel $1 \cup 5 \cup 6 \cup 9$, et « 12 » le système matériel déformable $(1 \cup 5 \cup 6 \cup 9) \cup 2$.

On note $\mathbf{B}_k = \left(\begin{array}{ccc} \vec{x}_k & \vec{y}_k & \vec{z}_k \end{array} \right)$ la base liée au solide n°k, pour $k \in \{1, 2, 3\}$

On demande d'effectuer l'étude dynamique des systèmes matériels 1 et 12 par rapport au socle 3,

étude dans laquelle on prend en compte les petites variations des angles θ et φ au voisinage de zéro :

- Montrer tout d'abord que la forme générale de la matrice d'inertie du solide 1 au point O dans la base \mathbf{B}_1 est
$$[J_1^O]_{\mathbf{B}_1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$$
, en appelant J_1 l'opérateur d'inertie de 1.

On obtient une relation analogue pour le solide 2, où les indices 1 sont remplacés par 2.

- Exprimer dans la base B_2 les moments des torseurs dynamiques $\{\mathcal{D}_{1/3}\}$ et $\{\mathcal{D}_{12/3}\}$ sous forme de développements limités (DL) au premier ordre pour φ au voisinage de 0. Le candidat est libre de choisir la démarche pour obtenir ce résultat, ainsi que le moment de l'étude le plus judicieux pour effectuer ce DL. Toutefois, on suggère de travailler dans la base B_2 en exprimant la matrice d'inertie $[J_1^o]_{B_2}$ comme une matrice diagonale perturbée, de la forme $[J_1^o]_{B_2} = [J_1^o]_{B_1} + K_1 \cdot \varphi + K_2 \cdot \varphi^2 + \dots + K_n \cdot \varphi^n + o(\varphi^n)$, où K_1, K_2, \dots sont des matrices indépendantes de φ , et $o(\varphi^n)$ une matrice dont les coefficients sont négligeables devant φ^n . On veillera à pousser le DL à un ordre n suffisant pour que les résultats finaux (c'est à dire les moments dynamiques) soient au premier ordre.
- Déterminer les moments des torseurs d'efforts extérieurs $\{\bar{1} \rightarrow 1\}$ et $\{\bar{2} \rightarrow 12\}$.
- Écrire par rapport au repère $R_3 = (O, B_3)$ supposé galiléen, le Principe Fondamental de la Dynamique pour les deux systèmes « 1 » et « 12 », et en extraire les deux équations significatives de moments autour des axes de rotation Ox_2 et Oy_2 .
- Il ne reste plus qu'à reconnaître dans ces équations les « termes de couplage » entre les axes X (celui de θ) et Y (celui de φ). On majorera ces termes dans le cas particulier de régimes harmoniques de même fréquence $\theta = \theta_0 \sin(\omega t)$ et $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \psi)$, puis on comparera avec les spécifications.

2.3. ETUDE DE LA COMMANDE DE L'AXE X

Question 5 : Fonctions de transfert – Performances en BO et BF du prototype (5 points)

- Déterminer la Fonction de Transfert (FT) en Boucle Ouverte (BO) de la boucle d'asservissement de position : on applique le signal au point P_2 , la sortie est mesurée en P_5 (voir diagramme fonctionnel, Figure 11 p. 10/12).
- Sur un diagramme de Bode, tracer le diagramme asymptotique et la réponse harmonique en BO correspondant à cette fonction de transfert.
(On donne $\text{Log}_{10} 2 \approx 0,3$, $\text{Log}_{10} 3 \approx 0,5$, $\text{Log}_{10} 5 \approx 0,7$: tracer le graphe du log et interpoler à main levée).
- Déterminer la Fonction de Transfert en Boucle Fermée (BF) complète à partir du diagramme fonctionnel : entrée = consigne C_θ , sortie = θ . Pour en simplifier l'écriture, exprimer la transmittance inverse $(H_{BF})^{-1}$.
(En disposant de moyens de calcul, on aurait comparé aux relevés expérimentaux...)
- Dédire du relevé de bruit sur le prototype commandé en BF que la résolution est conforme. Vérifier que le couplage entre axes est conforme.
- Analyser les graphes des réponses expérimentales indicielle et harmonique en BF du prototype : discuter la stabilité et le respect des spécifications. Comparer avec les réponses théoriques issues de la fonction de transfert en BF. Que penser des résonances apparaissant autour de 1 kHz, et des brusques déphasages correspondants ?
- La commande est réalisée numériquement à partir de signaux fournis par l'ASO, échantillonnés à une période τ de l'ordre de 200 Hz. Le temps d'acquisition des mesures et d'élaboration des commandes est de l'ordre de 2τ . Dire en quoi ce retard peut dégrader les performances de la correction de surface d'onde, et comment on pourrait corriger ce problème.

3. DOSSIER TECHNIQUE

On fournit ci-dessous des extraits du dossier technique original. Certaines données n'ont pas d'emploi direct ou évident dans le sujet du concours, mais ont été fournies pour respecter la cohérence et le réalisme de l'ensemble. Par ailleurs, plusieurs questions s'appuient sur le dossier technique, sans toujours préciser à quels éléments le candidat doit se référer. Il appartient à ce dernier de réaliser lui-même la recherche des éléments significatifs du dossier (ce qui est typiquement une démarche d'ingénieur), et de faire apparaître clairement les références à ses sources lors de la rédaction du devoir : Il est indispensable de citer le n° de la figure ou du tableau auquel on fait allusion ; s'il le faut, on pourra recopier à main levée certaines courbes afin de les commenter, etc.

3.1. ELEMENTS DE CAHIER DES CHARGES : SPECIFICATIONS.

3.1.1. SPECIFICATIONS OPTIQUES

Géométrie de la pupille : \varnothing 110 mm au niveau du TTM.

Miroir plan \varnothing 140 mm, épaisseur 23 mm

3.1.2. SPECIFICATIONS DE CORRECTION DE BASCULEMENT (TILT).

(La formule pour convertir un angle α_{ciel} de basculement du miroir en angle α_{MTT} dans le ciel est : $\alpha_{\text{ciel}} = 2 \cdot \alpha_{\text{MTT}} \cdot \frac{D_{\text{MTT}}}{D_{\text{VLT}}}$, où D_{MTT} est le diamètre de la pupille au niveau du TTM et D_{VLT} celui de la pupille du télescope, égal à 8 m. On trouve : $\alpha_{\text{ciel}} = 0,0275 \cdot \alpha_{\text{MTT}}$)

- Amplitude des angles de basculement mécanique de chaque axe : 0,9 milliradians (mrd)
- Amplitude des angles de basculement dans le ciel : 0,024 mrd
- Résolution des angles de basculement mécanique (amplitude totale): 3 microradians (μ rd)
- Résolution des angles de basculement dans le ciel (amplitude totale): : 0,084 μ rd

Fonction de transfert globale (en BF) :

- Gain jusqu'à 100 Hz 1
- Retard de phase à 50 Hz $< 20^\circ$
- Temps de réponse à 90% < 2 ms.
- Premier dépassement en réponse indicielle $< 10\%$
- Bande passante à -3 dB : 400 Hz

3.1.3. SPECIFICATIONS DE SOUS-ENSEMBLE ELECTRIQUE

Les deux axes X et Y, doit être commandables simultanément et séparément.

Couplage entre axes : $< 10\%$

Signaux d'entrée : 10 V analogiques

Contrôle de l'angle de sortie pour chaque axe : tension du capteur capacitif de position (10 V).

3.2. ELEMENTS

D'ARCHITECTURE

3.2.1. PARTIE OPERATIVE

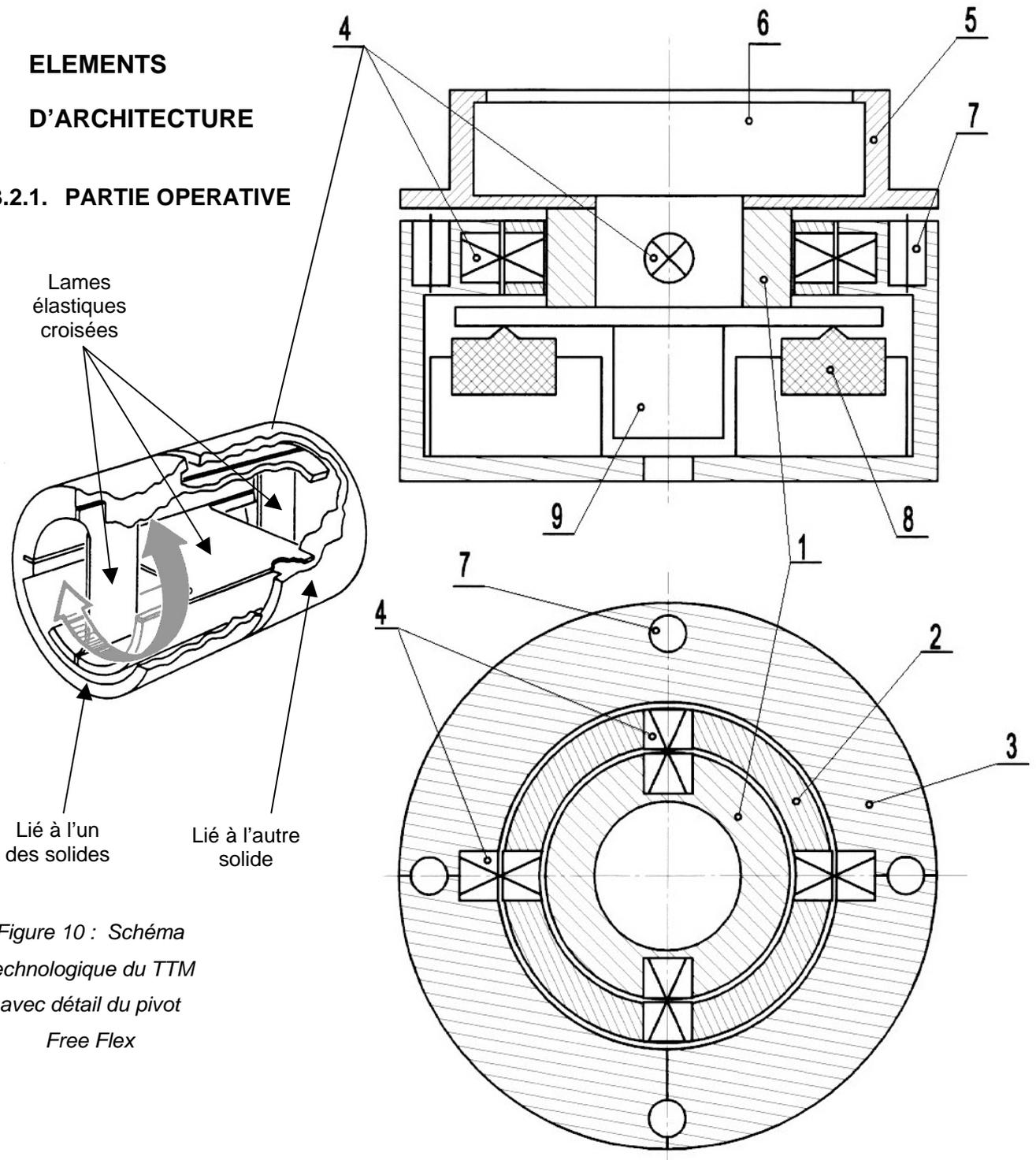


Figure 10 : Schéma technologique du TTM avec détail du pivot Free Flex

Tableau 1: Nomenclature de la Figure 10

1	Anneau central	6	Miroir
2	Anneau intermédiaire	7	Capteurs capacitifs
3	Bâti	8	Actionneurs linéaires de type « haut-parleur »
4	Pivots élastiques Free Flex	9	Contrepoids
5	Berceau de miroir		

Tableau 2	Moments principaux d'inertie (kg.m ²)			Centre d'inertie
	I _x	I _y	I _z	
Solide « 1 » = 1 ∪ 5 ∪ 6 ∪ 9	3,0.10 ⁻³	3,0.10 ⁻³	8,4.10 ⁻³	point O
Solide 2	0,6.10 ⁻³	0,6.10 ⁻³	0,3.10 ⁻³	point O

3.2.2. DIAGRAMME FONCTIONNEL DE L'ASSERVISSEMENT

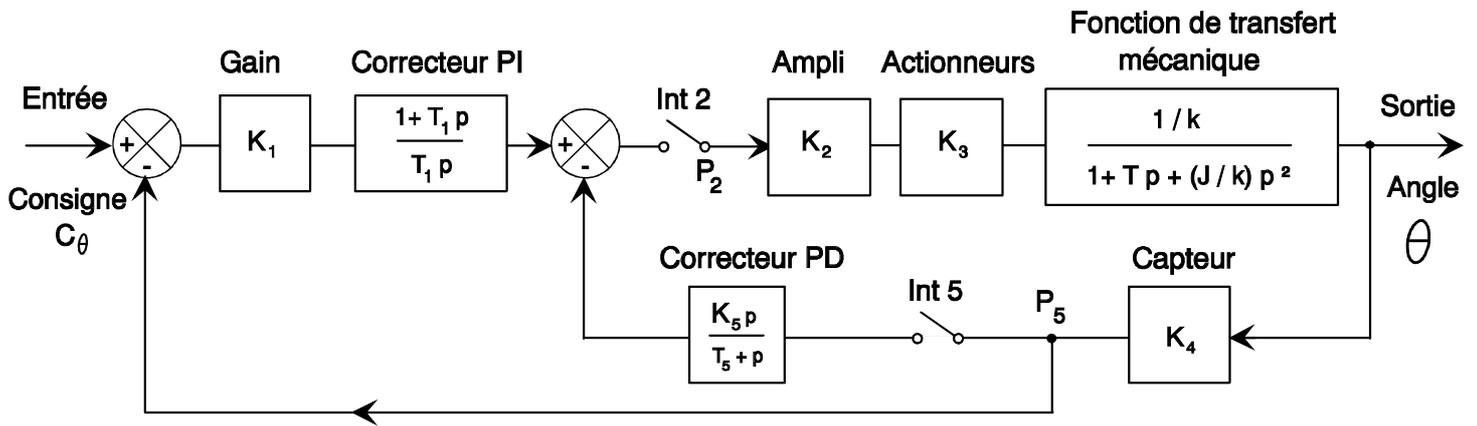


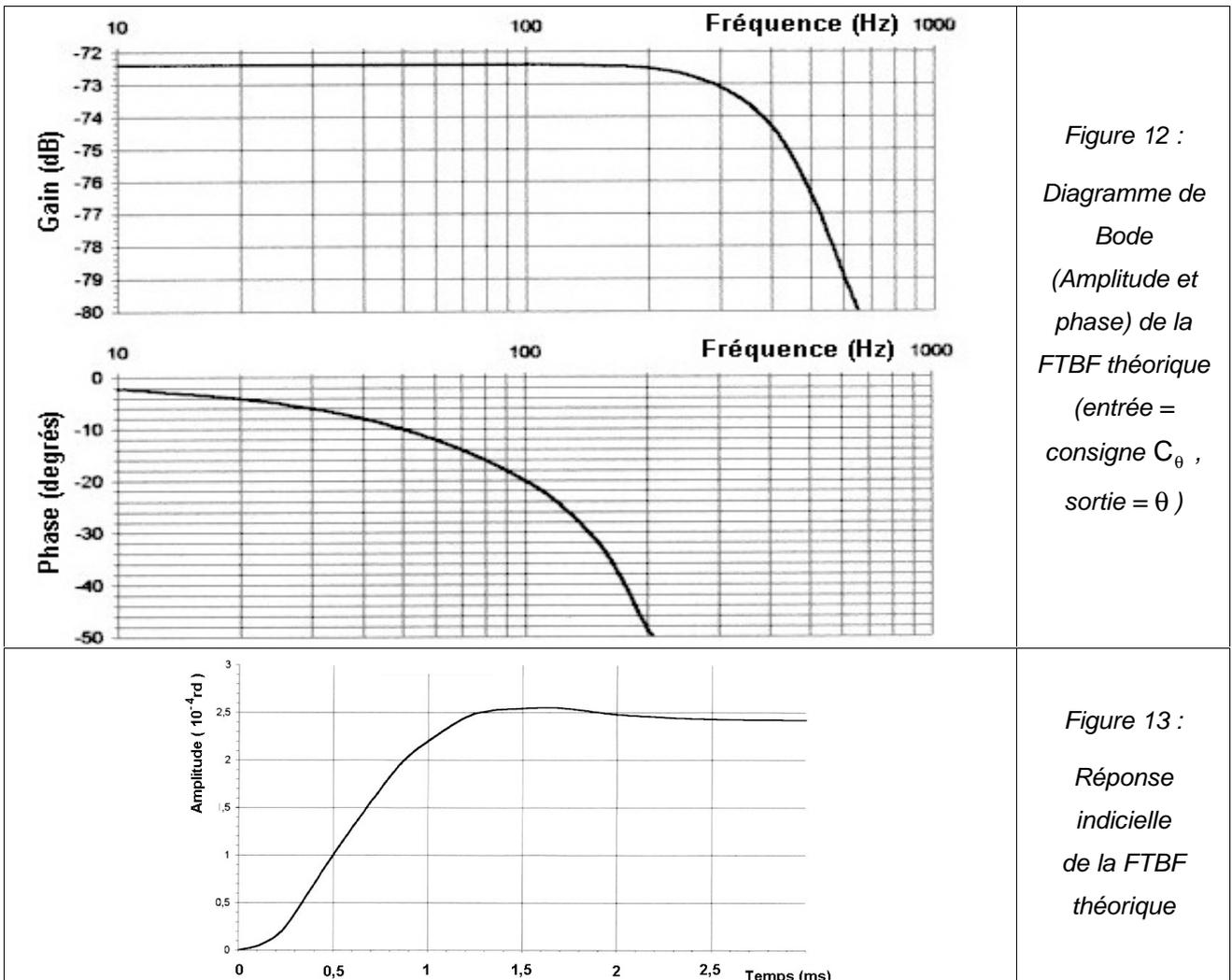
Figure 11 : Diagramme fonctionnel

3.3. CARACTERISTIQUES TECHNIQUES ET PERFORMANCES

3.3.1. VALEURS NUMERIQUES DES COEFFICIENTS (valeurs effectives mesurées).

Gain de l'amplificateur de puissance :	$K_2 = 0,1 \text{ A / V}$
Coefficient de couple des actionneurs :	$K_3 = 1,2 \text{ Nm / A}$
Valeur de réglage du gain des capteurs de position :	$K_4 = 4125 \text{ V / rd}$
Raideur torsionnelle des pivots flexibles pour chaque axe (raideur de 2 pivots) :	$k = 24 \text{ Nm / rd}$
Moment d'inertie / axe de rotation de la partie mobile 1U2 considérée comme un solide :	$J = 3,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.m}^2$
Facteur d'amortissement $T = 2 \cdot z / \omega_n$ (avec les notations usuelles) :	$T = 10^{-3}$

3.3.2. SIMULATIONS SUR LA FONCTION DE TRANSFERT



3.3.3. PROTOTYPE

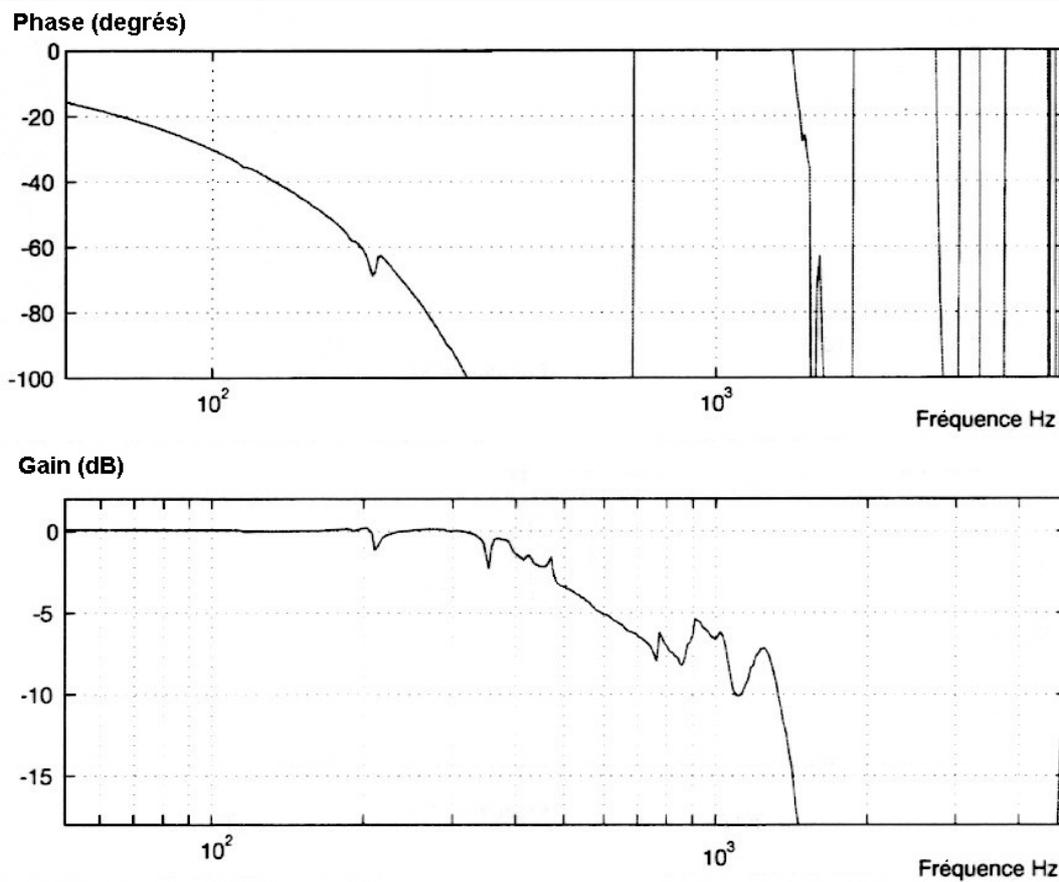


Figure 14 :
Axe X
Diagramme de
Bode
de la FTBF
expérimentale
sur Prototype

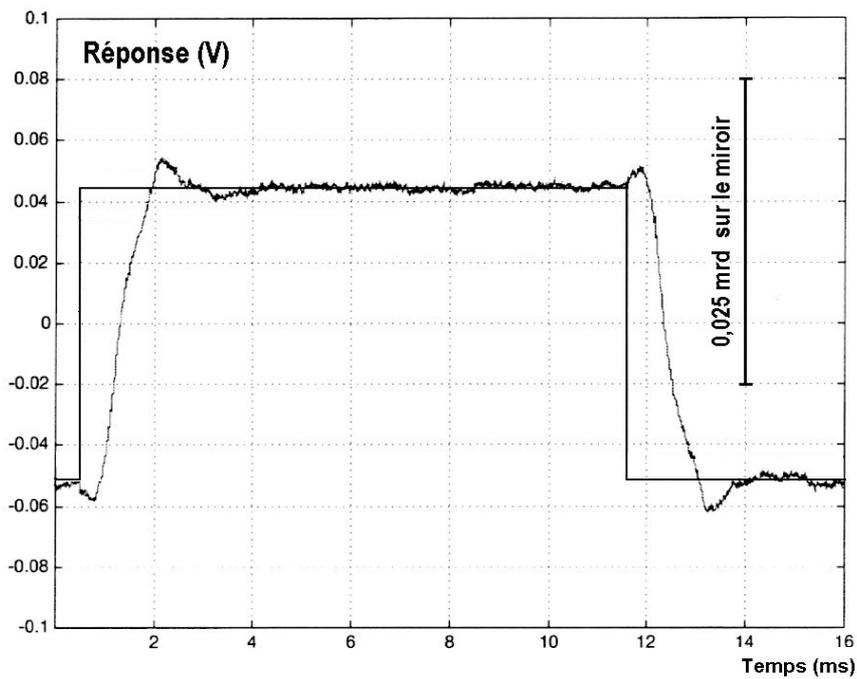


Figure 15 :
Axe X
Réponse
indicielle en BF
expérimentale
sur Prototype

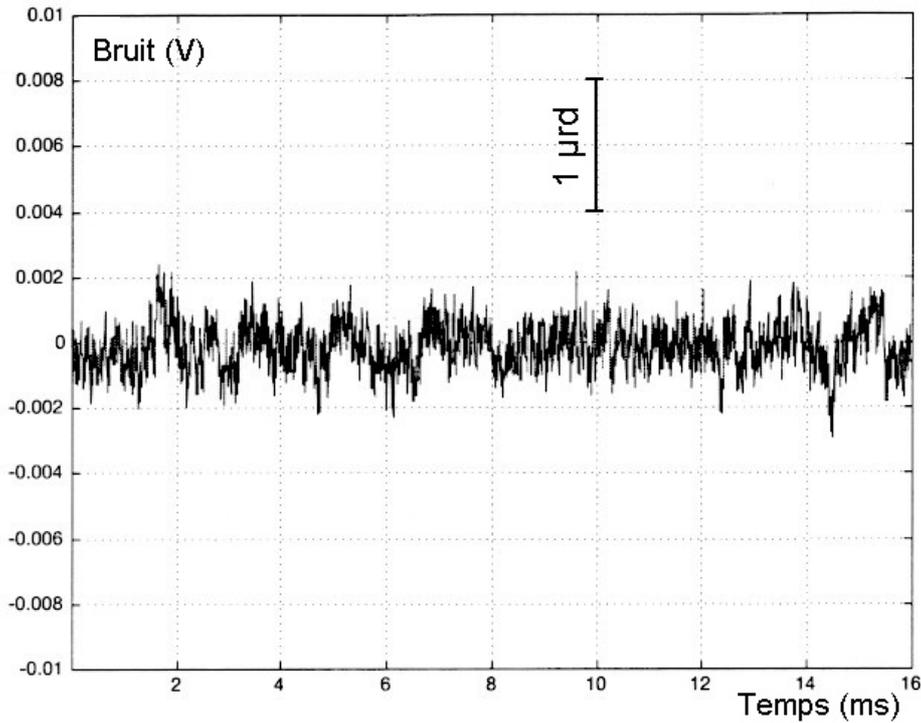


Figure 16 :
Axe X
Mesures de
bruit
sur Prototype

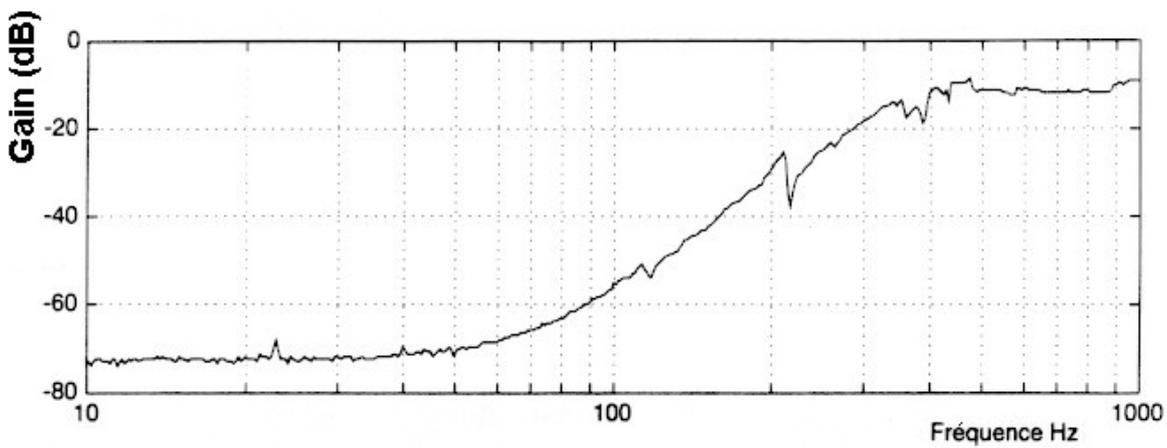


Figure 17 :
Couplage
entre axes :
Influence de
l'axe X sur
l'axe Y
(entrée
sinusoïdale
sur X, lecture
du gain sur Y)

Mesures
sur Prototype

Fin du dossier technique